

機械系公告

107 學年度第 1 學期 期末各科會考範圍

工程數學(一) 期末會考範圍:

(註:本次範圍不含褶積與週期函數之拉式轉換，二階非齊次線性常微分方程式之特解不限定方法)

1. 二階齊次線性方程式(獨立解判斷與齊次解)：分為兩小題。
2. 二階非齊次線性常微分方程式(分解降階法)。
3. 二階非齊次線性常微分方程式(待定係數法)。
4. 二階非齊次線性常微分方程式(逆運算子法)。
5. 求解歐拉-柯西方程式。
6. 求函數的拉氏轉換：分為兩小題。
7. 求函數的拉氏轉換：分為兩小題。(階梯函數)
8. 求函數的反拉氏轉換：分為兩小題。
9. 拉氏轉換法應用(積分)。分為兩小題。
10. 拉氏轉換法應用，求解方程式之初始值問題。

1. 二階齊次線性方程式(獨立解判斷與齊次解)：分為兩小題。

1.1 獨立解判斷

試利用朗司基(Wronskian)行列式判斷各題之解是否為線性獨立

(1) $y'' - 9y = 0; y_1(x) = \cosh(3x), y_2(x) = \sinh(3x)$

(2) $y'' - \frac{7}{x}y' + \frac{16}{x^2}y = 0; y_1(x) = x^4, y_2(x) = x^4 \ln x$

(3) $y'' - 3y' + 2y = 0; y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{2x}$

1.2 求解下列二階常微分程式

(1) $y'' - y' - 20y = 0$

(2) $y'' + 8y' + 16y = 0$

(3) $y'' + 3y' + 3y = 0$

(4) $y'' - 6y' + 9y = 0$

(5) $y'' + 6y' + 25y = 0$

(6) $y'' + 7y' + 12y = 0$

2. 二階非齊次線性常微分方程式(分解降階法)。

(1) $y'' + 2y' + 5y = e^{-2x}$

(2) $y'' - 2y' + y = x - 2$

(3) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x} + 4x + 2$

(4) $y'' + y' - 2y = \sin 2x$

(5) $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$

3. 二階非齊次線性常微分方程式(待定係數法)。

(1) $y'' + 3y = -12x^2 e^{3x}$

(2) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2 + \ln x \quad (x > 0)$

(3) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x} + 4x + 2$

(4) $y'' + y' - 2y = \sin 2x$

(5) $y'' - 5y' + 6y = e^{4x}$

(6) $y'' - 5y' + 6y = \cos 3x$

(7) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

4. 二階非齊次線性常微分方程式(逆運算子法)：分為兩小題。

- (1). $y'' - 5y' + 6y = e^{6x}$ (2). $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$
 (3). $y'' - 2y' + y = x - 2$ (4). $y'' + 7y' + 12y = x^2$
 (5). $(D+1)(D-2)y = xe^{3x}$ (6). $y'' - 9y = \cos 3x + \sin 3x$
 (7). $y'' - 6y' + 9y = 2e^{3x} + 9x$

5. 求解歐拉-柯西方程式。

- (1) $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$ ($x > 0$) (2) $x^2y'' - 5xy' + 13y = 0$ ($x > 0$)
 (3) $t^2\ddot{y} + 2t\dot{y} + 100y = 0$ ($t > 0$) (4) $(x+2)^2y'' - 5(x+2)y' + 9y = 0$ ($x > -2$)
 (5) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$; $y(1) = 4$, $y'(1) = 7$
 (6) $x^2y'' + 2xy' - 2y = 6x$; $y(1) = 3$, $y'(1) = -7$

6. 求函數的拉氏轉換：分為兩小題。

(a) (由下列任選一題)(一題 5 分)

- (1) $f(t) = 2t^2 - 3\cos t$ (2) $f(t) = (3-2t)^2$ (3) $f(t) = \cos^2 2t$
 (4) $f(t) = \sin 2t \cos t$ (5) $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t \leq 1 \\ -3, & 1 < t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$ (6) $f(t) = t^4 - 2t^2 - 3$

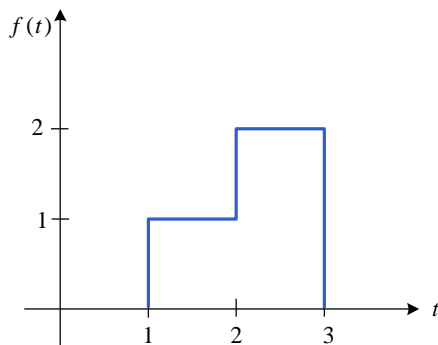
(b) (由下列任選一題)(一題 5 分)

- (1) $f(t) = (t^2 + 1)e^{-t}$ (2) $f(t) = te^t - e^{-2t}$ (3) $f(t) = e^{4t} \cos 3t$
 (4) $f(t) = e^{-t}(2\cos 3t + \sin 3t)$ (5) $f(t) = e^{-2t}(3 - \sin t + \cos t)$

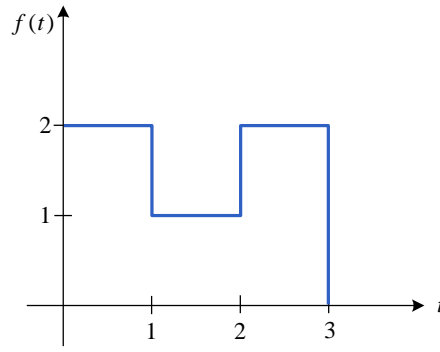
7. 求函數的拉氏轉換：分為兩小題。(階梯函數)

- (3). $f(t) = u(t-3)$ (4). $f(t) = u\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$
 (5). $f(t) = 2u(t) - u\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$ (6). $f(t) = \begin{cases} 2 & 0 < t < 2 \\ 1 & 2 < t < 4 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

(7).



(8).



8. 求函數的反拉氏轉換：分為兩小題。

(a) (由下列任選一題)(一題 5 分)

(1) $F(s) = \frac{4-3s}{s^2+4}$

(2) $F(s) = \frac{s^2}{(s+1)^3}$

(3) $F(s) = \frac{6}{4-3s}$

(4) $F(s) = \frac{2s-3}{s^2+9}$

(5) $F(s) = \frac{2s-8}{2s^2+8}$

(6) $F(s) = \frac{3s+2}{(s+2)^2}$

(b) (由下列任選一題)(一題 5 分)

(1) $F(s) = \frac{1}{s^2-8s+7}$

(2) $F(s) = \frac{1}{s(s+1)(s-1)}$

(3) $F(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2-2s+2)}$

(4) $F(s) = \frac{s^2+2s+3}{(s+2)(s-1)(s+1)}$

(5) $F(s) = \frac{6s+9}{s(s^2+9)}$

(6) $F(s) = \frac{2s-1}{s^2(s-1)}$

9. 拉氏轉換法應用(積分)。分為兩小題。

試求 1~4 題之積分。

(1). $\int_0^{\infty} e^{-3t} \sin 4t dt$

(2). $\int_0^{\infty} t e^{-2t} \sin 4t dt$

(3). $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$

(4). $\int_0^{\infty} e^{-t} \frac{\sin t}{t} dt$

10. 拉氏轉換法應用，求解方程式之初始值問題。(任選一題)

(1) $\frac{dy}{dt} + y = e^{-2t}; \quad y(0) = 1$

(2) $\frac{dy}{dt} + 2y = 5 \sin t; \quad y(0) = -1$

(3) $y'' + y = -1; \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

(4) $y'' + 2y' + y = (6t+2)e^{-t}; \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

(5) $y' - 2y = e^{2t}; \quad y(0) = -1$