

微積分 (二)

★★ 期末考試會考進度：

1. 多變數函數、偏導函數
2. 偏微分---連鎖法則
3. 高階偏導函數
4. 雙變數函數的極值
5. 二重積分
6. 二重積分---積分次序交換
7. 瑕積分

108 學年度微積分(二)期末會考參考題庫

一、偏微分(基本)

1. $f(x, y) = x^3 - 3y^5 + 6$, 求 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$
2. $f(x, y) = 3x^5 - 2x^2y^3 + 7y$, 求 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$
3. $f(x, y) = \sqrt{y} - \frac{3}{x}$, 求 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$
4. $f(x, y) = 2x - 3y + 5$, 求 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$
5. $f(x, y) = x\sqrt{y}$, 求 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$
6. $f(x, y) = \sin y - 2\cos x$, 求 f_x, f_y
7. $f(x, y) = 3x^4 \cos y - 7$, 求 f_x, f_y
8. $f(x, y) = 2xy^6 - y^3e^x + 39$, 求 f_x, f_y
9. $f(x, y) = \frac{\cos y}{x}$, 求 f_x, f_y
10. $f(x, y) = y^3 \ln x$, 求 f_x, f_y
11. $f(x, y) = \frac{\ln y}{x^3}$, 求 f_x, f_y
12. $f(x, y) = 2y^5 \tan^{-1} x$, 求 f_x, f_y
13. $f(x, y) = x^2y^2 - 3x^2 + 4y^3$, 求 $f_x(-2,3)$ $f_y(-2,3)$ 值。
14. $f(x, y) = 2x^3 + 5xy - 3y^2$, 求 $f_x(1,-1)$ $f_y(1,-1)$ 值。
15. $f(x, y) = y\sqrt{x}$, 求 $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(9,-18)}$, $\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(9,-18)}$ 值。
16. 若 $g(x, y) = \frac{xy}{x-y}$, 求 $\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(2,-2)}$, $\frac{\partial g}{\partial y}\Big|_{(2,-2)}$ 值

二、偏微分(連鎖律)

1. $f(x, y) = \sin(x^2 y^3)$, 求 f_x, f_y
2. $f(x, y) = (2x - 3y)^6$, 求 f_x, f_y
3. $f(x, y) = 1 - \cos(6x + \ln y)$, 求 f_x, f_y
4. $f(x, y) = \ln(x^2 - 2y^3)$, 求 f_x, f_y
5. 若 $g(x, y) = e^{x^3 + y^2}$, 求 $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$
6. 若 $z = e^x \sin xy$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$
7. 若 $z = \ln \sqrt{xy}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$
8. 若 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$
9. 若 $f(x, y, z) = \sin(2x + 3y + z)$, 求 f_x, f_y, f_z
10. 若 $f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 求 f_x, f_y, f_z
11. 若 $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 求 f_x, f_y, f_z

三、二階偏導函數

1. 若 $f(x, y) = x^3 e^y - 6y \ln x$, 求 $f(x, y)$ 的所有二階偏導函數。
2. 若 $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$, 求 $f(x, y)$ 的所有二階偏導函數。
3. 若 $f(x, y) = x^4 - 3x^2 y^3 + 3y^4$, 求 $f(x, y)$ 的所有二階偏導函數。
4. 若 $f(x, y) = 3xe^y - 2ye^{-x}$, 求 $f(x, y)$ 的所有二階偏導函數。
5. 若 $g(x, y) = \cos(x - 2y)$, 求 $g(x, y)$ 的所有二階偏導函數。
6. 若 $z = 5xy$, 求證 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$
7. 若 $z = x^2 - y^2$, 求證 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$
8. 若 $z = e^x \sin y$, 求證 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

四、全微分、連鎖法則

1. 若 $z = 5x^3y^2$ ，求 dz
2. 若 $z = e^x \sin y$ ，求 dz
3. 若 $z = \frac{x^2}{y}$ ，求 dz
4. 若 $w = x^2 + y^2 + z^2$ ，求 dw
5. 若 $w = e^y \cos z + x^2$ ，求 dw
6. 若 $w = x^2 + y^2, x = e^t, y = e^{-t}$ ，求 $\frac{dw}{dt}$
7. 若 $w = x^2y, x = \sin t, y = 2 \cos t$ ，求 $\frac{dw}{dt}$
8. 若 $w = x^2 - y^2, x = s + t, y = s - t$ ，求 $\left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_{(2,-1)}, \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{(2,-1)}$
9. 若 $w = y^3 - 3x^2y, x = e^s, y = e^t$ ，求 $\left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_{(0,1)}, \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{(0,1)}$

五、用偏微分求隱函數微分

1. 若 $x^2y + z^3 = 3xy^2z$ ，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$
2. 若 $x^2y + y^2z - xz^2 - 6 = 0$ ，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$
3. 若 $4x^2y^3 + 7x^3y^4 - x^4 + 3y^2 - 17 = 0$ ，求 $\frac{dy}{dx}$
4. 若 $x^3 - 2 \cos xy + y^2 + 7 = 0$ ，求 $\frac{dy}{dx}$

六、相對極值與鞍點

1. 若 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 2x + 2y - 4$ ，求相對極值與鞍點(若存在)。
2. 若 $f(x, y) = 2xy - x^2 - 2y^2 + 3x + 4$ ，求相對極值與鞍點(若存在)。
3. 若 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9x + 7$ ，求相對極值與鞍點(若存在)。

七、二重積分

1. 求 $\int_0^2 \int_1^4 6x^2y dy dx$ 值
2. 求 $\int_1^3 \int_0^3 (2x + y) dx dy$ 值

3. 求 $\iint_R xy \cos y dA$ 值, $R: -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi$
4. 求 $\iint_R \frac{xy^3}{x^2+1} dA$ 值, $R: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2,$
5. $R = \{(x, y) | y^3 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 1\}$, $f(x, y) = 2x + 3y$, 求 $\iint_R f(x, y) ds$ 值。
6. 若 $R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, x \leq y \leq \sqrt{2x}\}$, $f(x, y) = 12x^2 y$, 求 $\iint_R f(x, y) ds$ 值。

八、二重积分——积分次序交换

1. 求 $\int_0^2 \int_{2y}^4 e^{-\frac{y}{x}} dx dy$ 值。
2. 求 $\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dy dx$ 值。
3. 求 $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dy dx$ 值。
4. 求 $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \frac{dx dy}{x^4+1}$ 值。

九、瑕积分

1. 求 $\int_2^\infty \frac{dx}{x^3}$
2. 求 $\int_{-\infty}^0 e^{2x} dx$
3. 求 $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
4. 求 $\int_{-3}^0 \frac{dx}{x^2}$
5. 求 $\int_{-1}^3 \frac{dx}{x-2}$
6. 求 $\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$
7. 求 $\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx$